Dipartimento di Scienze Statistiche Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2013-2014

lezione 21: 25 marzo 2014

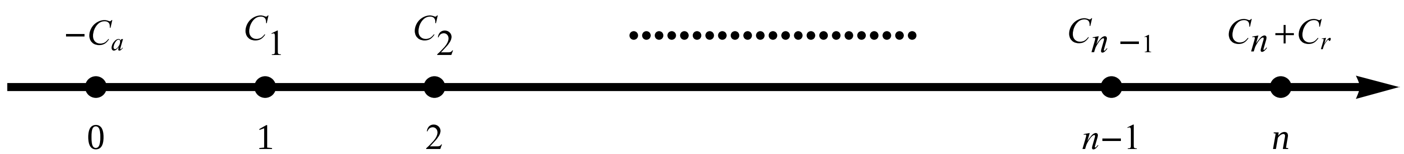
professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

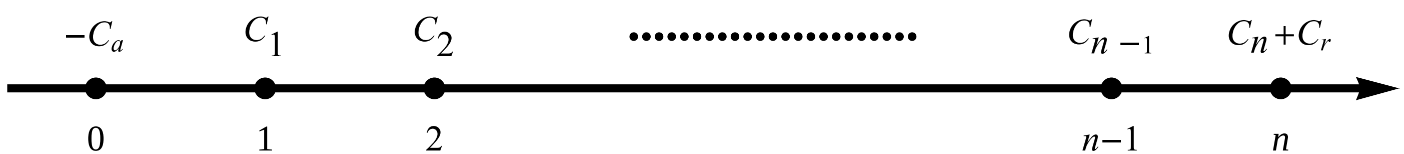
CCT/CCTEu

Si tratta di un titolo a cedola variabile: si ha l'esborso di un capitale iniziale C_a seguito da n cedole, che si solito sono indicizzate al rendimento dei BOT, e dalla restituzione del capitale C_r contestualmente all'ultima cedola. L'esborso iniziale ed il rimborso finale per svariati motivi possono non essere coincidenti. Sono titoli di credito al portatore o all'ordine, con rendimento a tasso variabile. Gli interessi sono corrisposti tramite cedole semestrali posticipate (vi sono stati casi, in passato, di emissioni con cedola annuale), il cui rendimento è pari al rendimento dei BOT semestrali nell'ultima asta che precede il godimento della cedola, aumentato di uno spread che dal 1996 è stato fissato a 15 punti base (0,15%). Il rimborso avviene alla pari in un'unica soluzione alla scadenza.

Nel 2010 i CCT sono stati modificati e sostituiti dal CCTEu. Il titolo è sempre a tasso variabile ma è indicizzato al tasso di interesse interbancario Euribor 6 mesi. La prima emissione di questa tipologia di titoli era di 5 anni, successivamente di 7. Il ministero del Tesoro non esclude la possibilità di cambiamenti al riguardo, in base alle preferenze espresse dal mercato.



Nel 2010 i CCT sono stati modificati e sostituiti dal CCTEu. Il titolo è sempre a tasso variabile ma è indicizzato al tasso di interesse interbancario Euribor 6 mesi. La prima emissione di questa tipologia di titoli era di 5 anni, successivamente di 7. Il ministero del Tesoro non esclude la possibilità di cambiamenti al riguardo, in base alle preferenze espresse dal mercato.



$$R(i) = -C_a + \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} + C_r(1+i)^{-n}$$

Nel caso dei CCT non ci sono semplificazioni nel calcolo: occorre risolvere la corrispondente equazione algebrica di grado n ($=$ numero delle cedole) in cui compaiono tutti i termini. Tale equazione in termini di $v = (1+i)^{-1}$ si scrive

$$C_a = C_1 v + C_2 v^2 + \cdots + C_{n-1} v^{n-1} + (C_n + C_r) v^n$$

Considerazioni teoriche

La ricerca del tir, è, in generale, un problema mal posto, nel senso che non è dato sapere, a priori, se il rea si annulli in corrispondenza di un tasso finanziariamente significativo.

Il problema più semplice

Un investimento C_0 è effettuato al tempo zero, poi seguono n entrate, $C_1, \ldots, C_n$ ai tempi , $t_1 = 1, \ldots, t_n = n$.

Teorema. *Sia assegnato il flusso di cassa* $C_0, C_1, \ldots, C_n$. *Supposto che sia:*

(a) $C_0 < 0, \quad C_1, \ldots, C_n \geq 0$

(b) $C_1 + \cdots + C_n > -C_0$

allora esiste un solo $i^\star$ *tale che* $R(i^\star) = 0$.

Dimostrazione. Poniamo $v = (1+i)^{-1}$. Consideriamo la funzione:

$$f(v) = \sum_{k=0}^{n} C_k v^k. \qquad (*)$$

Dimostrazione. Poniamo $v = (1+i)^{-1}$. Consideriamo la funzione:

$$f(v) = \sum_{k=0}^{n} C_k v^k. \qquad (*)$$

Per le ipotesi **(a)** e **(b)** la funzione introdotta in $(*)$ ammette una radice nell'intervallo aperto $]0,1[$:

$$f(0) = C_0 < 0, \qquad f(1) = \sum_{k=0}^{n} C_k > 0.$$

Dimostrazione. Poniamo $v = (1+i)^{-1}$. Consideriamo la funzione:

$$f(v) = \sum_{k=0}^{n} C_k v^k. \qquad (*)$$

Per le ipotesi **(a)** e **(b)** la funzione introdotta in $(*)$ ammette una radice nell'intervallo aperto $]0,1[$:

$$f(0) = C_0 < 0, \qquad f(1) = \sum_{k=0}^{n} C_k > 0.$$

Resta da far vedere l'unicità di tale radice. La derivata $f'(v)$ è strettamente positiva:

$$f'(v) = \sum_{k=1}^{n} k\, C_k\, v^{k-1}$$

Criterio di Nostrøm

A Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return

The Journal of Financial and Quantitative Analysis,

Vol. 7 *No.* 3 (1972) 1835 – 1839

Teorema. *Dato il flusso di cassa* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *consideriamo il flusso cumulato non attualizzato all'istante* $0 \leq t \leq n$

$$A_t = \sum_{k=0}^{t} a_k$$

Diremo **flusso di cassa cumulativo** *il flusso* $A_0, A_1, \ldots, A_n$. *Allora il flusso* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *ha unico tir se il flusso di cassa cumulativo cambia segno una sola volta e* $A_n \neq 0$.

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

$a_0 = A_0 = -100\,000$

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

$a_0 = A_0 = -100\,000$

$a_1 = 400,\ A_1 = -99\,600$

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

$a_0 = A_0 = -100\,000$

$a_1 = 400,\ A_1 = -99\,600$

$a_2 = 400,\ A_2 = -99\,200$

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

$a_0 = A_0 = -100\,000$

$a_1 = 400,\ A_1 = -99\,600$

$a_2 = 400,\ A_2 = -99\,200$

$a_{47} = 400,\ A_{47} = -82\,250$

Esempio Acquisto un immobile per 100 000 €dopo un mese lo affitto a 400 € per 4 anni quando lo rivendo ricavo al netto delle tasse 98 500 €. Inoltre alla fine di ciascuno dei tre primi anni pago tasse per 350 €

$a_0 = A_0 = -100\,000$

$a_1 = 400, \; A_1 = -99\,600$

$a_2 = 400, \; A_2 = -99\,200$

$a_{47} = 400, \; A_{47} = -82\,250$

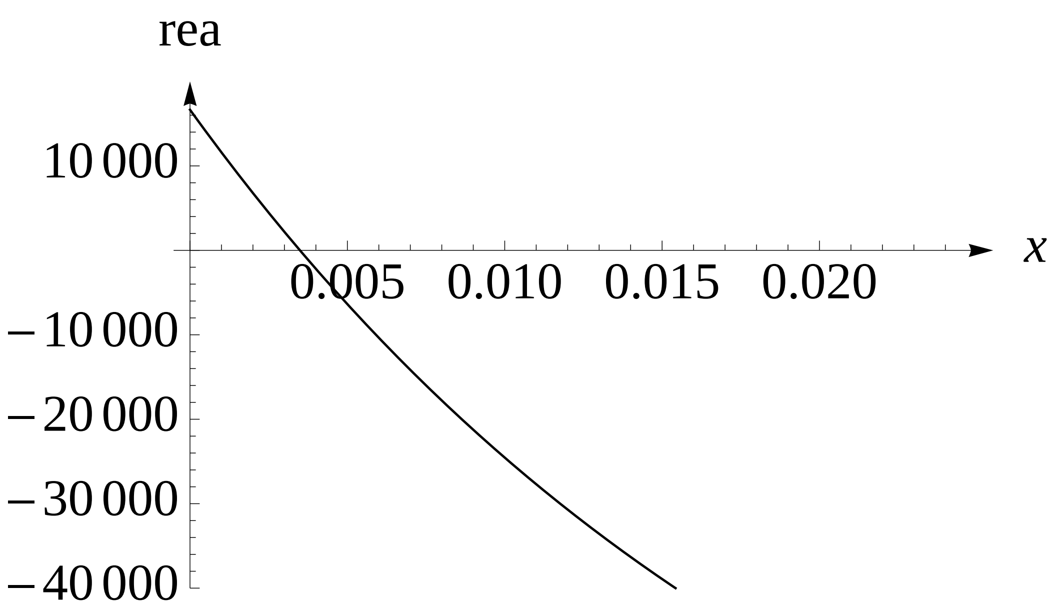
$a_{48} = 98\,900, \; A_{48} = 16\,650$

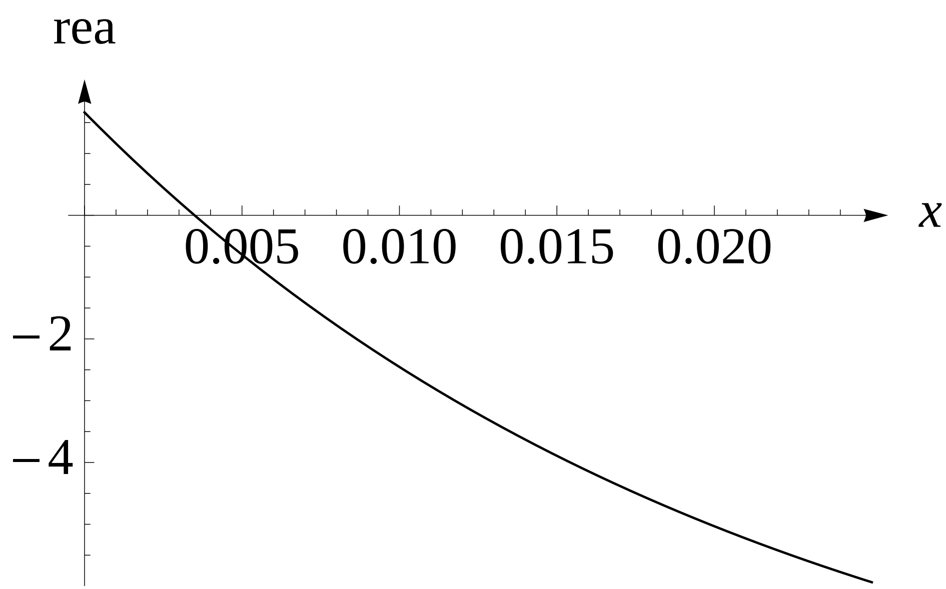
Se x denota il tasso mensile $(1+x)^{12} = 1+i$ il van del progetto è

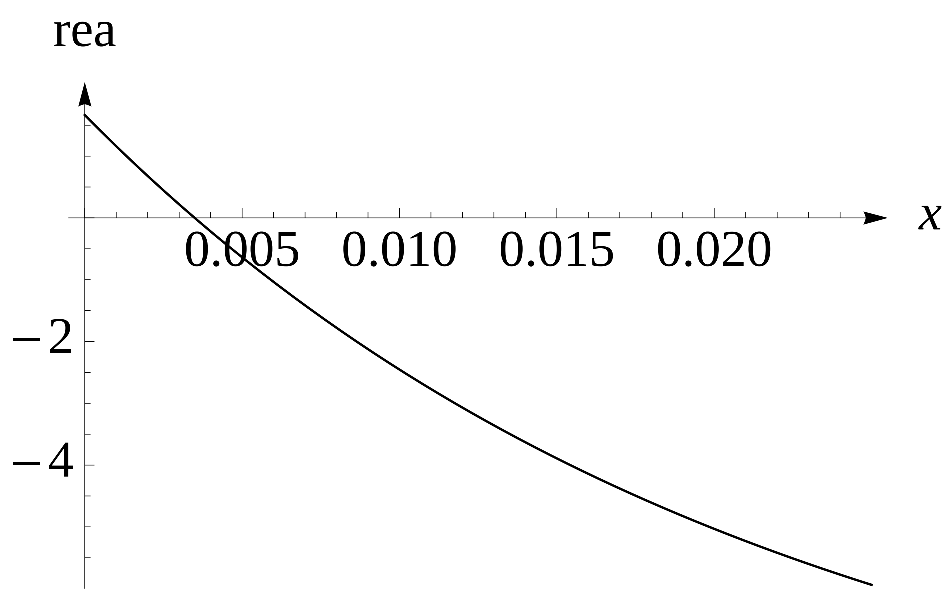
$$R(x) = -100\,000 + 400a_{\overline{48}|x} - 350a_{\overline{3}|(1+x)^{12}-1} + 98\,500(1+x)^{-48}$$

Se x denota il tasso mensile $(1+x)^{12} = 1+i$ il van del progetto è

$$R(x) = -100\,000 + 400 a_{\overline{48}|x} - 350 a_{\overline{3}|(1+x)^{12}-1} + 98\,500(1+x)^{-48}$$




rea
x
0.005
0.010
0.015
0.020
−2
−4



Il tir mensile è $x = 0,00349342$ pari ad un tasso annuo

$i = (1 + x)^{12} - 1 = 0,042736$

La condizione di E. Levi

Utilizziamo una notazione diversa da quella con cui abbiamo presentato i flussi di cassa. Le *uscite*, che sono le partite negative del flusso, saranno denotate con la lettera u e saranno numerate in ordine crescente: $u_1, u_2, \dots, u_s$. Le valute delle uscite saranno indicate con la sequenza temporale $t_1, t_2, \dots, t_s$.

La condizione di E. Levi

Utilizziamo una notazione diversa da quella con cui abbiamo presentato i flussi di cassa. Le *uscite*, che sono le partite negative del flusso, saranno denotate con la lettera u e saranno numerate in ordine crescente: $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Le valute delle uscite saranno indicate con la sequenza temporale $t_1, t_2, \ldots, t_s$.

Le entrate avranno scadenze $\tau_1, \ldots, \tau_r$, $r \in \mathbb{N}$, anche esse sono rappresentate in ordine crescente e denotate da $e_1, \ldots, e_r$.

La condizione di E. Levi

Utilizziamo una notazione diversa da quella con cui abbiamo presentato i flussi di cassa. Le *uscite*, che sono le partite negative del flusso, saranno denotate con la lettera u e saranno numerate in ordine crescente: $u_1, u_2, \dots, u_s$. Le valute delle uscite saranno indicate con la sequenza temporale $t_1, t_2, \dots, t_s$.

Le entrate avranno scadenze $\tau_1, \dots, \tau_r$, $r \in \mathbb{N}$, anche esse sono rappresentate in ordine crescente e denotate da $e_1, \dots, e_r$. Qui ammettiamo possibile più di una uscita e non facciamo l'ipotesi che le valute delle uscite debbano precedere le valute delle entrate.

Il concetto cruciale della condizione di Levi è quello di **scadenza media aritmetica**:

$$\zeta_u = \frac{t_1 u_1 + \cdots + t_s u_s}{u_1 + \cdots + u_s}$$

Teorema Se il flusso finanziario, composto dalle uscite $u_1, \ldots, u_s$ e dalle entrate $e_1, \ldots, e_r$, con le scadenze rispettive $t_1, t_2, \ldots, t_s$ e $\tau_1, \ldots, \tau_r$ è tale che:

1. la somma delle entrate supera quella delle uscite:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{r} e_k > \sum_{j=1}^{s} u_j,}$$

Teorema Se il flusso finanziario, composto dalle uscite $u_1, \dots, u_s$ e dalle entrate $e_1, \dots, e_r$, con le scadenze rispettive $t_1, t_2, \dots, t_s$ e $\tau_1, \dots, \tau_r$ è tale che:

1. la somma delle entrate supera quella delle uscite:

$$\sum_{k=1}^{r} e_k > \sum_{j=1}^{s} u_j,$$

2. la scadenza media aritmetica delle uscite precede la prima entrata:

$$\zeta_u < \tau_1,$$

Teorema Se il flusso finanziario, composto dalle uscite $u_1, \ldots, u_s$ e dalle entrate $e_1, \ldots, e_r$, con le scadenze rispettive $t_1, t_2, \ldots, t_s$ e $\tau_1, \ldots, \tau_r$ è tale che:

1. la somma delle entrate supera quella delle uscite:

$$\sum_{k=1}^{r} e_k > \sum_{j=1}^{s} u_j,$$

2. la scadenza media aritmetica delle uscite precede la prima entrata:

$$\zeta_u < \tau_1,$$

esiste allora uno ed un solo tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria.

Scelta fra investimenti

Assegnati due flussi di cassa $C_0,\ C_1, \dots, C_n$ e $D_0,\ D_1, \dots, D_m$; i primi con scadenze $t_0, \dots, t_n$ e i secondi con scadenze $\tau_0, \dots, \tau_m$.

Scelta fra investimenti

Assegnati due flussi di cassa $C_0, C_1, \ldots, C_n$ e $D_0, D_1, \ldots, D_m$; i primi con scadenze $t_0, \ldots, t_n$ e i secondi con scadenze $\tau_0, \ldots, \tau_m$.

Avremo due rendimenti economici attualizzati:

$$R_C(i) = \sum_{k=0}^{n} C_k \,(1+i)^{-t_k}, \qquad R_D(i) = \sum_{j=0}^{m} D_j \,(1+i)^{-\tau_j}$$

Scelta fra investimenti

Assegnati due flussi di cassa $C_0,\ C_1, \ldots, C_n$ e $D_0,\ D_1, \ldots, D_m$; i primi con scadenze $t_0, \ldots, t_n$ e i secondi con scadenze $\tau_0, \ldots, \tau_m$.

Avremo due rendimenti economici attualizzati:

$$R_C(i) = \sum_{k=0}^{n} C_k\,(1+i)^{-t_k}\,, \qquad R_D(i) = \sum_{j=0}^{m} D_j\,(1+i)^{-\tau_j}$$

Quando si confrontano due investimenti riterremo più conveniente quello che produce il tir maggiore, mentre quando si confrontano due costi, si cerca il flusso con il tir più basso.

Esempio pagina 37 rivisitato

Il signor Tal dei Tali ha una impresa edile. Dovendo fare un lavoro per la ditta Pagodopo si sente fare la seguente proposta: o pagamento **immediato** di €5 000, oppure pagamento **dilazionato** in un anno con cinque pagamenti periodici posticipati di €1 000, €1 010, €1 020, €1 030 e €1 040. Sapendo che, se il signor Tal dei Tali versasse la somma di €5 000 presso la sua banca, otterrebbe un tasso di interesse del 4% si domanda quale alternativa conviene?

Primo flusso $C_0 = -5000$, $C_1 = 5200$ con scadenze $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$

Primo flusso $C_0 = -5000$, $C_1 = 5200$ con scadenze $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$

Secondo flusso $D_0 = -5000$, $D_1 = 1000$, $D_2 = 1010$, $D_3 = 1020$, $D_4 = 1030$, $D_5 = 1040$ con scadenze $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1/5$, $\tau_2 = 2/5$, $\tau_3 = 3/5$, $\tau_4 = 4/5$, $\tau_5 = 5/5$

Primo flusso $C_0 = -5000$, $C_1 = 5200$ con scadenze $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$

Secondo flusso $D_0 = -5000$, $D_1 = 1000$, $D_2 = 1010$, $D_3 = 1020$, $D_4 = 1030$, $D_5 = 1040$ con scadenze $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1/5$, $\tau_2 = 2/5$, $\tau_3 = 3/5$, $\tau_4 = 4/5$, $\tau_5 = 5/5$

Il primo flusso rende (per costruzione) il 4% annuo

$$-5000 + 5200v = 0 \implies v = \frac{5000}{5200} = \frac{25}{26}$$

Primo flusso $C_0 = -5000$, $C_1 = 5200$ con scadenze $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$

Secondo flusso $D_0 = -5000$, $D_1 = 1000$, $D_2 = 1010$, $D_3 = 1020$, $D_4 = 1030$, $D_5 = 1040$ con scadenze $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1/5$, $\tau_2 = 2/5$, $\tau_3 = 3/5$, $\tau_4 = 4/5$, $\tau_5 = 5/5$

Il primo flusso rende (per costruzione) il 4% annuo

$$-5000 + 5200v = 0 \implies v = \frac{5000}{5200} = \frac{25}{26}$$

quindi

$$i = \frac{1}{v} - 1 = \frac{26}{25} - 1 = \frac{1}{25} = 0,04$$

Il secondo flusso ha le scadenze ogni 73 giorni, ma per evitare complicazioni computazionali è preferibile considerare l'equazione

$$1040v^5 + 1030v^4 + 1020v^3 + 1010v^2 + 1000v - 5000 = 0$$

che porgerà il tasso sulla base 1/5 di anno, che andrà poi convertito in annuo per confrontarlo con quello trovato per il primo flusso.

Il secondo flusso ha le scadenze ogni 73 giorni, ma per evitare complicazioni computazionali è preferibile considerare l'equazione

$$1040v^5 + 1030v^4 + 1020v^3 + 1010v^2 + 1000v - 5000 = 0$$

che porgerà il tasso sulla base 1/5 di anno, che andrà poi convertito in annuo per confrontarlo con quello trovato per il primo flusso.

Usando Newton, partendo dal 3% pari a $i_5 = 0,00592927$ e quindi $v = 0,994106$ abbiamo

$$F(v) = v - \frac{1040v^5 + 1030v^4 + 1020v^3 + 1010v^2 + 1000v - 5000}{5200v^4 + 4120v^3 + 3060v^2 + 2020v + 1000}$$

così

$$v_1 = F(v_0) = F(0,994106) = 0,993450$$

così

$$v_1 = F(v_0) = F(0,994106) = 0,993450 \quad v_2 = F(v_1) = 0,993449$$

così

$$v_1 = F(v_0) = F(0,994106) = 0,993450 \quad v_2 = F(v_1) = 0,993449$$

tornando a $i_5 = 0,0065942$ e su base annua $1 + i = (1 + i_5)^5$ troviamo $i = 0,0334087$ il che ci conferma la preferenza per la prima opzione

Operazioni finanziare aleatorie

Criteri di scelta fra progetti i cui flussi di cassa sono legati a **eventi aleatori**

- criterio del valore medio
- criterio dell'utilità attesa
- criterio della dominanza stocastica
- criterio media-varianza

Richiami

Se X è una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathbb{P})$ $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ la media (valore atteso) di X è

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

Richiami

Se X è una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathbb{P})$ $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la media (valore atteso) di X è

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

Se X assume i valori distinti $\{x_1, \dots, x_m\}$ allora

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Richiami

Se X è una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathbb{P})$ $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ la media (valore atteso) di X è

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

Se X assume i valori distinti $\{x_1, \ldots, x_m\}$ allora

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Si dimostra che se X, Y sono due variabili aleatorie e a, $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di una variabile reale e X è una variabile aleatoria allora la composizione $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ è anche essa una variabile aleatoria. Il suo valore atteso è

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\omega_i))\mathbb{P}(\omega_i)$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di una variabile reale e X è una variabile aleatoria allora la composizione $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ è anche essa una variabile aleatoria. Il suo valore atteso è

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\omega_i))\mathbb{P}(\omega_i)$$

o anche

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Prodotto di variabili aleatorie

Siano X, Y variabili aleatorie rispettivamente con valori $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, \ldots, y_m\}$. La variabile aleatoria prodotto ha valori $x_i y_j$ per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Consideriamo gli eventi $E_{ij} = \{X = x_i, Y = y_j\}$ che ripartiscono Ω in sottoinsiemi dove XY ha valori $x_i y_j$ su E_{ij}. Si ha

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Prodotto di variabili aleatorie

Siano X, Y variabili aleatorie rispettivamente con valori $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, \ldots, y_m\}$. La variabile aleatoria prodotto ha valori $x_i y_j$ per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Consideriamo gli eventi $E_{ij} = \{X = x_i,\, Y = y_j\}$ che ripartiscono Ω in sottoinsiemi dove XY ha valori $x_i y_j$ su E_{ij}. Si ha

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j)$$

Nella situazione particolare in cui X e Y sono indipendenti si ha che

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Varianza e deviazione standard

Se X ha valore atteso finito μ la **varianza** di X è

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)$$

Varianza e deviazione standard

Se X ha valore atteso finito μ la **varianza** di X è

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)$$

la **deviazione standard** è la radice positiva della varianza

$$\sigma_X = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Teorema

Se X ha valore atteso finito μ allora

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
2. se $a \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
3. se X e Y sono indipendenti $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
4. se $c \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$